Ejercicios Teoría Cuántica de Campos. Capítulo 5

Autor del curso: Javier García

Problemas resueltos por: Roger Balsach

10 de febrero de 2019

1. Ecuación de Schwinger-Dyson para $S = \frac{m^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda}{24}\phi^4$

Sea $S = \frac{m^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda}{24}\phi^4$ la acción de una determinada teoría, vamos a usar el mismo procedimiento que ha usado Javier para construir la ecuación de Schwinger-Dyson en el caso $S = \frac{m^2}{2}\phi^2$.
Definimos el funcional Z como:

$$Z[J] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-S[\phi]+J\phi}\mathrm{d}\phi \tag{1}$$

La derivada de la acción es

$$S'[\phi] = m^2\phi + \frac{\lambda}{6}\phi^3 \tag{2}$$

Como la potencia más alta de ϕ es 3, vamos a derivar Z tres veces:

$$Z'[J] = \int_{-\infty}^{\infty} (J\phi - S[\phi])' \, e^{-S[\phi]+J\phi}\mathrm{d}\phi = \int_{-\infty}^{\infty} \phi e^{-S[\phi]+J\phi}\mathrm{d}\phi \tag{3}$$

$$Z''[J] = \int_{-\infty}^{\infty} \phi^2 e^{-S[\phi]+J\phi}\mathrm{d}\phi \tag{4}$$

$$Z'''[J] = \int_{-\infty}^{\infty} \phi^3 e^{-S[\phi]+J\phi}\mathrm{d}\phi \tag{5}$$

Vamos ahora a evaluar la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} S'[\phi] e^{-S[\phi]+J\phi} \mathrm{d}\phi = \int_{-\infty}^{\infty} \left(m^2\phi + \frac{\lambda}{6}\phi^3 \right) e^{-S[\phi]+J\phi} \mathrm{d}\phi \tag{6}$$

$$= m^2 \int_{-\infty}^{\infty} \phi e^{-S[\phi]+J\phi} \mathrm{d}\phi + \frac{\lambda}{6} \int_{-\infty}^{\infty} \phi^3 e^{-S[\phi]+J\phi} \mathrm{d}\phi \tag{7}$$

$$= m^2 Z'[J] + \frac{\lambda}{6} Z'''[J] \tag{8}$$

Por otra parte (a partir de aquí daré por supuesto los límites de la integral y las dependencias de los funcionales)

$$\int S' e^{-S+J\phi} \mathrm{d}\phi = - \int \left(-S' + J - J\right) e^{-S+J\phi} \mathrm{d}\phi \tag{9}$$

$$= - \int \left(-S' + J\right) e^{-S+J\phi} \mathrm{d}\phi + \int J e^{-S+J\phi} \mathrm{d}\phi \tag{10}$$

$$= - \int \frac{\partial}{\partial \phi} \left(e^{-S+J\phi} \right) \mathrm{d}\phi + \int J e^{-S+J\phi} \mathrm{d}\phi = J \int e^{-S+J\phi} \mathrm{d}\phi \tag{11}$$

La integral

$$\int \frac{\partial}{\partial \phi} \left(e^{-S+J\phi} \right) \mathrm{d}\phi = \lim_{A \to \infty} e^{-S[A]+JA} - \lim_{B \to \infty} e^{-S[-B]-JB} = \lim_{A \to \infty} e^{-\frac{\lambda}{24}A^4} - \lim_{B \to \infty} e^{-\frac{\lambda}{24}B^4}$$

converge a cero en el caso $\lambda > 0$, si $\lambda < 0$ la integral diverge, entonces para obtener la ecuación (11) debemos suponer $\lambda > 0$. Si éste es el caso, ya hemos terminado pues uniendo (11) y (8) obtenemos

$$\int S' e^{-S+J\phi} \mathrm{d}\phi = m^2 Z'[J] + \frac{\lambda}{6} Z'''[J] = J \int_{\infty}^{\infty} e^{-S[\phi]+J\phi} \mathrm{d}\phi = JZ[J] \tag{12}$$

$$\boxed{m^2 Z'[J] + \frac{\lambda}{6} Z'''[J] = JZ[J]} \tag{13}$$

2. Cálculo de $\langle \phi^2 \rangle$ a orden 2 con TCC

Vamos a invertir el orden propuesto por Javier, pues me parece que calcular los diagramas de Feynman después de pasar por el infierno de TCC (Teoría Cuántica de Campos) es más iluminador. Voy a aprovecharme lo máximo posible de la gran bondad de Javier que se ha tomado la molestia de calcular $Z''[0]$ y $Z[0]$ a orden 2 cada uno. Sabemos que

$$\left\langle \phi^2 \right\rangle = \frac{\frac{1}{m^2} - \frac{\lambda}{24}\frac{5\cdot 3}{m^6} + \frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{24^2}\frac{9\cdot 7\cdot 5\cdot 3}{m^{10}} + \mathcal{O}(\lambda^3)}{1 - \frac{\lambda}{24}\frac{3}{m^4} + \frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{24^2}\frac{7\cdot 5\cdot 3}{m^8} + \mathcal{O}(\lambda^3)} = \frac{\frac{1}{m^2} - \frac{5\lambda}{8m^6} + \frac{105\lambda^2}{128m^{10}} + \mathcal{O}(\lambda^3)}{1 - \frac{\lambda}{8m^4} + \frac{35\lambda^2}{384m^8} + \mathcal{O}(\lambda^3)} \tag{14}$$

Donde $\mathcal{O}(\lambda^3)$ significa todos los términos de orden 3 o superior (si lo quitamos tenemos la aproximación que ha calculado Javier en el capítulo 5). Veremos que estos términos de orden 3 y superior no son necesarios. Primero de todo vamos calcular el polinomio de Taylor de orden 2 de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} \tag{15}$$

Tal como nos enseña Javier en el capítulo 2 calculamos las dos primeras derivadas:

$$f'(x) = -1(1+x)^{-2} = \frac{-1}{(1+x)^2} \tag{16}$$

$$f''(x) = (-1)(-2)(1+x)^{-3} = \frac{2}{(1+x)^3} \tag{17}$$

Entonces

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 = \frac{1}{1+0} + \frac{-1}{(1+0)^2}x + \frac{2}{2(1+0)^3}x^2 = 1 - x + x^2 \tag{18}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{1 - \frac{\lambda}{8m^4} + \frac{35\lambda^2}{384m^8} + \mathcal{O}(\lambda^3)} = 1 - \left(-\frac{\lambda}{8m^4} + \frac{35\lambda^2}{384m^8} + \mathcal{O}\left(\lambda^3\right)\right) + \\ \left(-\frac{\lambda}{8m^4} + \frac{35\lambda^2}{384m^8} + \mathcal{O}\left(\lambda^3\right)\right)^2 + \mathcal{O}\left(\lambda^3\right)\end{aligned} \tag{19}$$

Donde el último $\mathcal{O}(\lambda^3)$ es debido a que para tener una igualdad estricta, en lugar de una aproximación, deberíamos usar los infinitos términos del polinomio de Taylor, pero el término de orden tres del polinomio (18) solo tendría términos $\mathcal{O}(x^3) = \mathcal{O}(\lambda^3)$.
Desarrollando los paréntesis nos queda que

$$\frac{1}{1 - \frac{\lambda}{8m^4} + \frac{35\lambda^2}{384m^8} + \mathcal{O}(\lambda^3)} = 1 + \frac{\lambda}{8m^4} - \frac{35\lambda^2}{384m^8} + \frac{\lambda^2}{64m^8} + \mathcal{O}\left(\lambda^3\right) \tag{20}$$

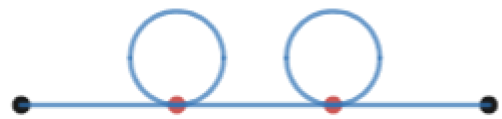

Figura 1: Primer diagrama de Feynman.

Ahora $\langle\phi^2\rangle$ será el producto de dos polinomios, vamos a hacer el producto

$$\left\langle\phi^2\right\rangle = \left(\frac{1}{m^2} - \frac{5\lambda}{8m^6} + \frac{105\lambda^2}{128m^{10}} + \mathcal{O}\left(\lambda^3\right)\right)\left(1 + \frac{\lambda}{8m^4} - \frac{29\lambda^2}{384m^8} + \mathcal{O}\left(\lambda^3\right)\right) \tag{21}$$

$$= \frac{1}{m^2} + \left(\frac{1}{8m^6} - \frac{5}{8m^6}\right)\lambda + \left(-\frac{29}{384m^{10}} - \frac{5}{64m^{10}} + \frac{105}{128m^{10}}\right)\lambda^2 + \mathcal{O}\left(\lambda^3\right) \tag{22}$$

$$= \frac{1}{m^2} - \frac{1}{2m^6}\lambda + \frac{2}{3m^{10}}\lambda^2 + \mathcal{O}\left(\lambda^3\right) \tag{23}$$

Fantástico! Tal como deseábamos hemos recuperado la expansión a orden 1, por lo que podemos afirmar que $\langle\phi^2\rangle$ a orden 2 es

$$\boxed{\left\langle\phi^2\right\rangle \approx \frac{1}{m^2} - \frac{1}{2m^6}\lambda + \frac{2}{3m^{10}}\lambda^2} \tag{24}$$

3. Cálculo de $\langle\phi^2\rangle$ a orden 2 con los diagramas de Feynman

Tal como Javier nos ha explicado en el capítulo 5 tenemos que calcular los términos que aparecen al considerar los diagramas de Feynman con 2 vértices. Hay tres diagramas a tener en cuenta que ya ha dibujado Javier en el vídeo. Vamos a calcularlos

3.1. Diagrama 1

Vamos a empezar por el diagrama que se muestra en la figura 1. Primero de todo observamos que hay exactamente 5 propagadores (líneas azules), las tres que conectan los puntos negros con los rojos y los dos *loops*. Si denotamos con $\mathscr{M}$ al “valor” del diagrama los cinco propagadores implican que

$$\mathscr{M}_1 = \left(\frac{1}{m^2}\right)^5 = \frac{1}{m^{10}} \tag{25}$$

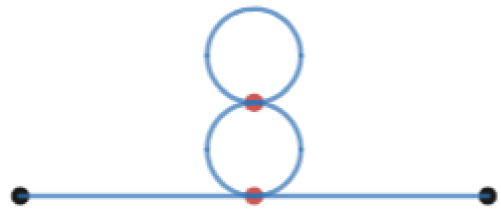

Figura 2: Segundo diagrama de Feynman.

Ahora fijémonos que hay dos vértices (puntos rojos), y por lo tanto debemos añadir un factor $(-\lambda)$ por cada uno

$$\mathscr{M}_1 = \frac{1}{m^{10}}(-\lambda)^2 = \frac{\lambda^2}{m^{10}} \tag{26}$$

Finalmente nos falta el "factor de simetría", con un único *loop* Javier nos ha contado que hay dos posibilidades (dejarlo igual o rotar 180°), a mi me gusta pensarlo como si tuviera que dibujar el diagrama con un lápiz sin levantarlo del papel, podría dibujar el *loop* en el sentido de las agujas del reloj o en sentido contrario.[1] La cuestión es que con dos *loops* podemos hacer cada *loop* en sentido horario o antihorario, por lo que en total tenemos 4 posibilidades (equivalente a decir que podemos rotar 180° ambos *loops*). Por lo tanto el "valor" del diagrama (que llamaré amplitud a partir de ahora) quedará

$$\mathscr{M}_1 = \frac{1}{4}\frac{\lambda^2}{m^{10}} \tag{27}$$

3.2. Diagrama 2

El siguiente diagrama es el que se muestra en la figura 2. De nuevo el número de propagadores (líneas azules) son 5, dos que unen los puntos negros con el rojo, dos para el *loop* "inferior" y uno para el *loop* superior, por lo que la amplitud de este diagrama tendrá un factor

$$\mathscr{M}_2 = \left(\frac{1}{m^2}\right)^5 = \frac{1}{m^{10}} \tag{28}$$

El número de vértices (puntos rojos) de nuevo es 2, pues estamos considerando solo diagramas con 2 vértices, por lo que añadimos un factor $-\lambda$ por cada vértice

$$\mathscr{M}_2 = \frac{(-\lambda)^2}{m^{10}} = \frac{\lambda^2}{m^{10}} \tag{29}$$

[1] No sé si pensarlo así es válido para cualquier diagrama, pero para los tres que interesan ahora sí.

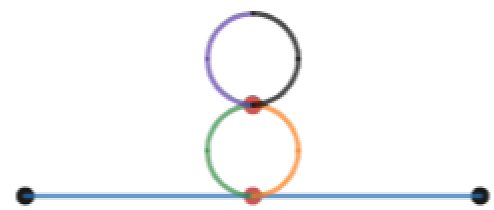

Figura 3: Diagrama de Feynman 2 colorido.

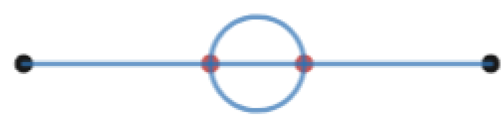

Figura 4: Tercer diagrama de Feynman

Finalmente el factor de simetría, de nuevo podemos decir que hay 4 diagramas "equivalentes" haciendo rotaciones de 180° a los dos *loops* o bien, si nos fijamos en la figura 3 vemos que hay cuatro formas de dibujar este *loop*, siguiendo éstos cuatro caminos:

naranja, **negro**, violeta, verde
naranja, violeta, **negro**, verde
verde, **negro**, violeta, naranja
verde, violeta, **negro**, naranja

Por lo tanto, el factor de simetría será igual que antes y la amplitud final de éste diagrama será:

$$\mathscr{M}_2 = \frac{1}{4}\frac{\lambda^2}{m^{10}} \tag{30}$$

3.3. Diagrama 3

Finalmente vamos a calcular la amplitud del tercer diagrama, el que se muestra en la figura 4. De nuevo hay cinco propagadores y dos vértices por lo que ya sabemos que la amplitud tendrá un factor $\frac{\lambda^2}{m^{10}}$, solo nos falta calcular el factor de simetría, esta vez imaginemos que numeramos los tres propagadores que unen los vértices con los números 1, 2 y 3. ¿Cuantas formas tenemos de "dibujar" el diagrama de Feynman sin levantar el lápiz del papel? Pues para ir de izquierda a derecha tenemos que hacer un pequeño "zig-zag" en el *loop*, debemos primero dibujar uno de los tres caminos (por lo tanto, tres opciones) después debemos volver atrás por uno de los dos que no hemos utilizado aún (por lo tanto, dos opciones) y finalmente volver a ir hacia adelante por el único camino que queda libre. Esto es un total de $3 \cdot 2 = 6$ posibilidades.[2] Por lo tanto la amplitud final queda

$$\mathscr{M}_3 = \frac{1}{6}\frac{\lambda^2}{m^{10}} \tag{31}$$

Por lo que finalmente la amplitud total de todos los diagramas de segundo orden es

$$\mathscr{M} = \mathscr{M}_1 + \mathscr{M}_2 + \mathscr{M}_3 = \frac{2}{4}\frac{\lambda^2}{m^{10}} + \frac{1}{6}\frac{\lambda^2}{m^{10}} = \frac{2}{3}\frac{\lambda^2}{m^{10}} \tag{32}$$

Que es justamente el término de orden 2 de la ecuación (24)

[2]De hecho, básicamente debemos escoger tres opciones sin repetir ninguna, esto en combinatoria viene descrito por 3! que es justamente 6.